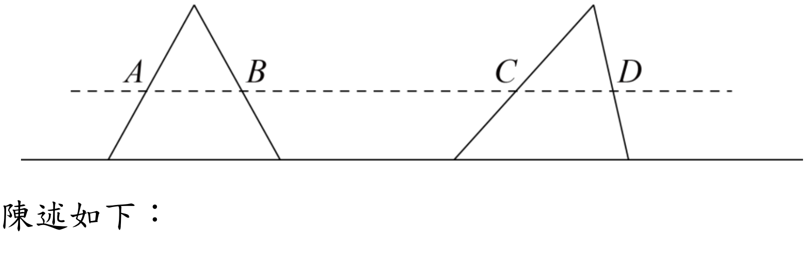
9 祖暅原理與正投影面積公式

三國時代的劉徽割圓術就是利用圓內接正多邊形面積來逼近圓周率π（視圓內接正多邊形面積為圓面積），劉徽注《九章算術》時，從圓內接正六邊形起算，算到正 192 邊形，這時候π的近似值為 3.141024。劉徽並在注中寫下割圓術的精髓“割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”

在公元五百年初，祖沖之的兒子祖暅，發揮了劉徽割圓的思想，提出了祖暅原理，這個原理成為計算面積與體積的有力工具。在陳述原理之前，我們先以一個具體而簡單的例子做說明：如下圖，兩個底長與高度一樣的三角形。當我們任意的劃一條水平虛線時，利用三角形的比例關係知道：線段 AB 與線段 CD 是等長的。基本上，祖暅原理就是說“具有這樣性質的兩個圖形的面積應該相等”。他的思想源頭就是劉徽的割圓術精髓“割之彌細，所差彌少，割之又割，以至於不可割，則兩圖形的面積相等矣。”。



現在將祖暅原理陳述如下：

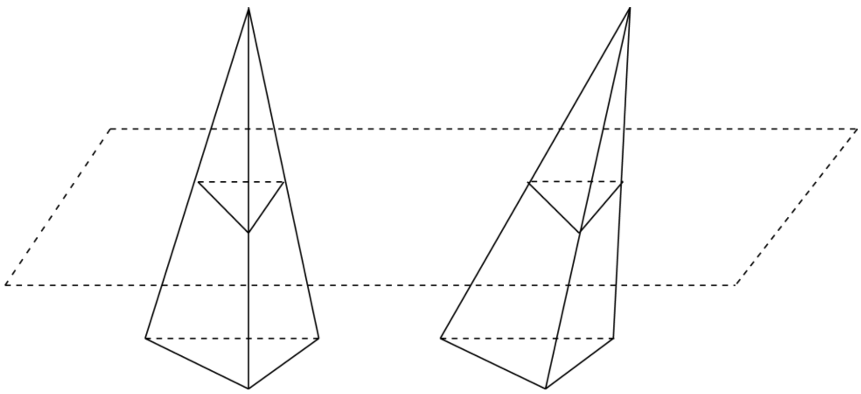
定理 9.1(祖暅原理) 底下是四個判斷面積或體積相等的原理。

(1) 設平面上有兩個圖形，若以某特定斜率的任意直線跟兩圖形相割，割出來的兩線段總是相等，則此兩圖形的面積也是相等的。

(2) 設空間中有兩個物體。若以某特定法向量的任意平面跟兩物體相截，截出來的兩塊面積總是相等，則此兩物體的體積也是相等的。

(3) 設平面上有兩個圖形。若以某特定斜率的任意直線跟兩圖形相割，割出來的兩線段長之比例總是固定的，則此兩圖形的面積比也是同一個比值。

(4) 設空間中有兩個物體。若以某特定法向量的任意平面跟兩物體相截，截出來的兩塊面積之比例總是固定的，則此兩物體的體積比也是同一個比值。



兩個三角錐的底(三角形)全等且等高

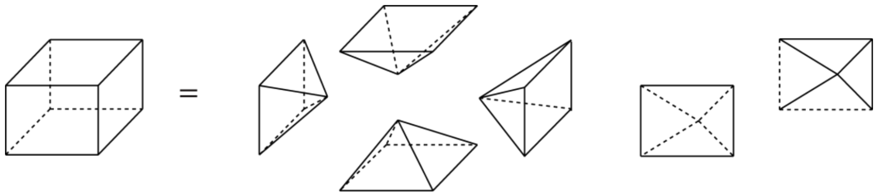
上圖是兩個立在地面上的三角錐(它們的底三角形全等且等高，唯傾斜角度不一樣)。由相似的性質可知：任意平行於地面的平面所截出的兩個三角形之面積是一樣的(因為所截的三角形與底三角形之面積比一樣)。根據祖暅原理，這兩個三角錐的體積也是相等的。由上圖說明及祖暅原理容易推廣為

例題 9.1　兩個底面積相等且高度一樣的多邊形椎體的體積是一樣的。

例題 9.2　底為四邊形的椎體(或稱四角椎)之體積為

$$\frac{\text{四邊形底面積}\times\text{高}}{3}.$$

【證明】由下圖悟出：



利用四角錐體積公式及祖暅原理

例題 9.3　圓錐體積為

$$\frac{\text{圓面積}\times\text{高}}{3}.$$

【證明】將欲求圓錐立在地上，並在圓錐旁邊立一個底面積跟它一樣，高度相等的四角錐。利用祖暅原理（採取平行於地面的平面來截）知道：這圓錐體積與四角錐體積一樣，套用四角錐體積公式，得證。

除了祖暅之外，祖暅的父親祖沖之與希臘數學家阿基米得也使用過“物體體積就是同一平行方向薄截面面積之和”的概念來求球體的體積。

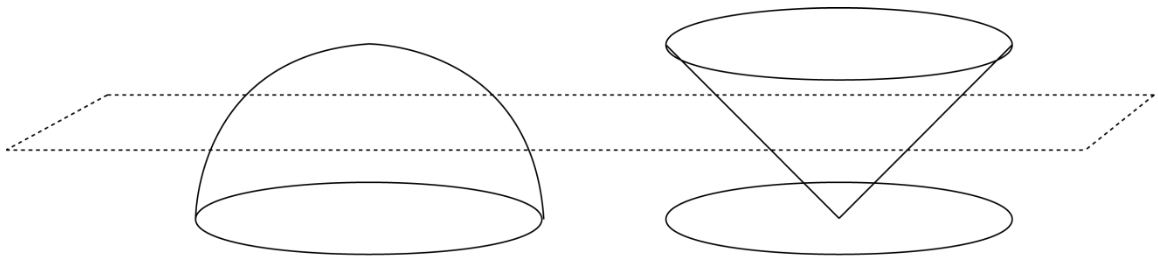
例題 9.4　半徑為 r 的球體體積為

$$\frac{4\pi r^3}{3}.$$

【證明】下圖左圖是一個半徑 r 的半球；右圖是底半徑 r 且高度也是 r 的圓柱，並從上方挖去半徑 r 且高度也是 r 的圓錐之後所構成的物體。他們都立在地平面上，斜線平面與地平面平行且離地面的高度為 h。這時斜線平面與半球的截面是一個半徑為 $\sqrt{r^2-h^2}$ 的圓，因此截面積為 $\pi(r^2-h^2)$。另一方面，斜線平面與右圖的截面是一個介於半徑 r 與 h 之間的環形區域，所以截面積為 $\pi(r^2-h^2)$。根據祖暅原理，半球的體積與右圖物體體積一樣。因為右圖物體體積＝圓柱體積－圓錐體積，所以

$$\text{半球體積}=(\pi r^2)\times r-\frac{(\pi r^2)\times r}{3}=\frac{2\pi r^3}{3},$$

得證。



阿基米得與祖沖之求球體體積方法

接下來，我們利用圓面積公式來推導橢圓的面積：

例題 9.5 設 $a>b>0$。證明：橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的內部面積為 πab。

【證明】下圖為圓（半徑為 a）方程式

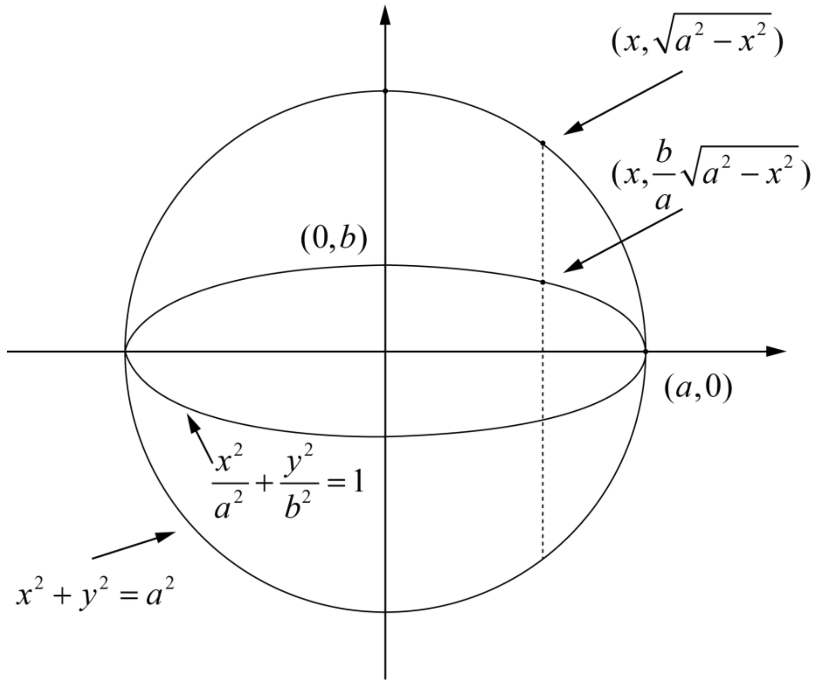
$$x^2+y^2=a^2$$

與橢圓(長軸為 a，短軸為 b)方程式

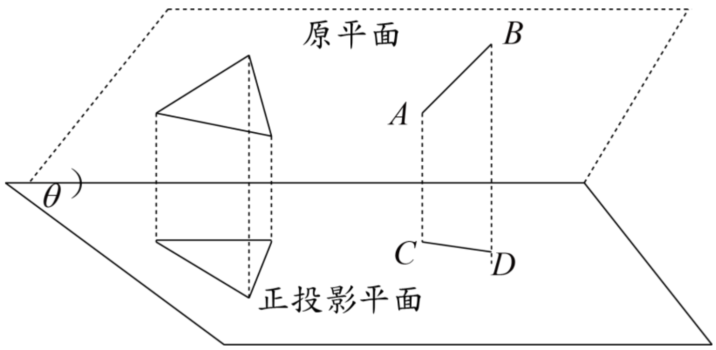
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

劃在一起的圖形。與 Y 軸相平行的虛線分別與圓及橢圓割出長度為 $2\sqrt{a^2-x^2}$ 與 $\dfrac{2b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ 的線段。根據祖暅原理，橢圓內部面積＝$\dfrac{b}{a}$×圓面積，所以橢圓內部面積為

$$\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab.$$



今有夾角為θ $(0\le\theta<\frac{\pi}{2})$的兩平面，其中一平面上有一個圖（稱此平面為原平面，此圖為原圖）。現在將原圖上每一個點對另一平面作垂足，這些垂足點所構成的圖形叫原圖在此平面的正投影圖（稱正投影圖所在的平面為正投影平面）。如下圖：左圖是一個三角形與其正投影圖三角形，右圖是線段AB與其正投影線段CD。值得一提的是：若線段AB與兩平面的交線垂直，則由兩平面夾角為θ的關係知道：正投影線段CD的長度為$AB\times\cos\theta$。



例題9.6　設原平面與正投影平面的夾角為θ $(0\le\theta<\frac{\pi}{2})$。若原平面上有一長度為$c$的線段，則其正投影線段長度$\ge c\cos\theta$。

【證明】若此線段與兩平面的交線垂直，則上述說明知道：正投影線段長度為$c\cos\theta$。

若此線段與兩平面的交線不垂直，則可以造一個直角三角形 ABC 使得

$AB = c,\ \angle ACB = 90^\circ$ 且 AC 與兩平面的交線垂直。設三角形 $A'B'C'$ 為三角形 ABC 的正投影三角形。因為 AC 與兩平面的交線垂直，所以 $A'C' = AC \times \cos\theta$。

因為 BC 與兩平面的交線平行，所以 $B'C' = BC$。由正投影三角形 $A'B'C'$ 仍為直角三角形得到

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 = AC^2 \times \cos^2\theta + BC^2 \geq AB^2 \times \cos^2\theta.$$

因此 $A'B' \geq c\cos\theta$。

定理 9.2 (正投影面積公式)　設原平面與正投影平面的夾角為 $\theta\ (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$。那麼正投影圖的面積為原圖面積的 $\cos\theta$ 倍，即：正投影圖之面積＝原圖面積×$\cos\theta$。

【證明】任取一與原平面與正投影平面的交線垂直之平面。若此平面與原圖所割的線段長為 c，則此平面與正投影圖所割的線段長為 $c\cos\theta$。根據祖暅原理得知：

正投影圖之面積＝原圖面積×$\cos\theta$。

例題 9.7 (牛頓定理)　試證明：

(1) 設 A, B, C, D 是平面上四個固定點，且 AB 與 CD 不平行。證明：使 ΔPAB 之面積＋ ΔPCD 之面積和為某固定常數之 P 點的軌跡為一直線或者不存在。

(2) 證明：圓外切四邊形的兩條對角線之中點連線必通過圓心。

【證明】有關(1)的證明：將原圖形經過適當的投影，使 AB, CD 投影後互相垂直。

有關(2)的證明：利用(1)的結果，證明欲求三點共線。

例題 9.8　空間中有一平面 Γ，此平面上有一個面積為 S 的三角形。若此三角形在 xy, yz, zx 平面上的正投影圖面積分別為 S_z, S_x, S_y。請依下列步驟證明等式

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z \tag{9.1}$$

(1) 【立體畢氏定理】設 $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$ 為空間中的三點且 O 代表原點。試證明：$\Delta ABC^2=\Delta OAB^2+\Delta OBC^2+\Delta OCA^2$。

(2) 若平面 Γ 與 xy,yz,zx 平面的夾角分別為 $\theta_z,\theta_x,\theta_y$。試證明：

$1=\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z$。

(3) 證明等式(9.1)成立。

習題 9.1　在矩形的邊上任取三個點，何時此三點所圍成的三角形面積為最大？

習題 9.2　任一三角形是否可以經過適當的投影之後成為直角三角形？

習題 9.3　試完成下列問題：

(a) 橢圓投影之後的圖形可能有哪些？

(b) 利用正投影面積公式證明橢圓面積公式。

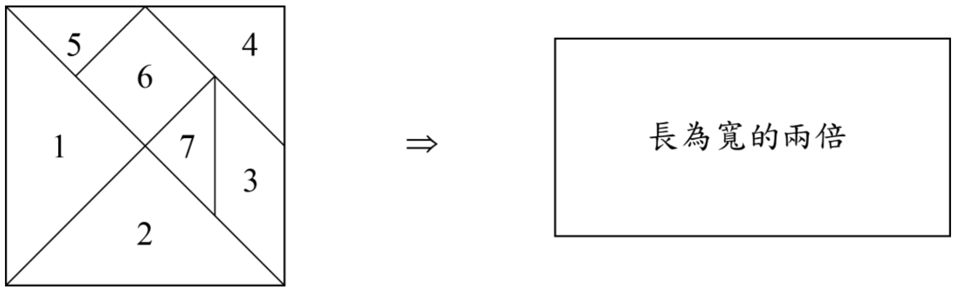
(c) 圓內接三角形何時面積最大？

(d) 橢圓內接三角形何時面積最大？

習題 9.4　圓內接四邊形何時面積最大？又橢圓內接四邊形何時面積最大？

動手玩數學

下左圖是一個正方形被分割成七塊多邊形（即所謂的七巧板），下右圖是一個長為寬的兩倍之矩形(其面積與左正方形一樣)。是否可以將七巧板擺放在此矩形上(不可重疊)？



挑戰題

單位正立方體被平面所截出之最大截面積為何？（利用正投影面積公式）

祖沖之與祖暅

祖暅是祖沖之的兒子。祖沖之為南北朝的天文曆算家，以編製大明曆、計算圓周率π之值（繼承三國時代劉徽割圓術的想法)、證明球的體積公式聞名。月球上有個地方以其命名，以紀念他的成就。事實上，祖沖之及其父、子三人都算是數學家。

劉徽、祖沖之、祖暅及阿基米得的“割之彌細，所失彌少”之精神可以視為當代微積分想法的濫觴。